GHEORGHE CĂINICEANU
(coordonator)
EMILIA-ȘTEFANIA RĂDUCAN, DANA-MARIANA PAPONIU,
CARMEN-VICTORIȚA CHIRFOT, MARIANA DRAGA-TĂTUCU,
IULIANA GIMOIU, GABRIELA MĂLINEANU,
VASILE-DORU PREȘNEANU, ELENA RÎMNICEANU

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele IX-XII

2015-2016

PARALELA 45
EDITURA

CUPRINS

ENUNȚURI

clasa a IX-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Alba

9.O.1. Rezolvați ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=5x-4$.

9.O.2. a) Determinați formula termenului general al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, dacă $x_1=1$, $x_{n+1}=x_n+2n$, $\forall\, n\geq 1$.

b) Demonstrați că $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}_+$, avem inegalitatea $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$.

9.O.3. Demonstrați că:

a) $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<2$, $\forall\, n\geq 1$, n număr natural.

b) $P(n):\ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$, $n\geq 1$, este o propoziție adevărată, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

9.O.4. Fie $ABCDEF$ un hexagon inscriptibil și H_1, H_2, H_3, M_1, M_2, M_3 ortocentrele triunghiurilor CDE, DEF, EFA, FAB, ABC, respectiv BCD. Demonstrați că H_1M_1, H_2M_2, H_3M_3 sunt concurente.

Arad

9.O.5. Dacă a și b sunt numere întregi strict pozitive, atunci expresiile a^2+4b și b^2+4a nu pot fi simultan numere perfecte.

9.O.6. Se consideră ΔABC și punctele $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ astfel încât $\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=k$. Arătați că dreapta MN trece prin centrul de greutate al ΔABC dacă și numai dacă $k=1$.

Eugen Rusu

9.O.7. Fie x_1, x_2 soluțiile ecuației $x^2+px-1=0$, p impar. Dacă notăm $y_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in \mathbb{N}$, arătați că:

a) $y_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $(y_n, y_{n+1}) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

9.O.8. Se dau șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ definite astfel $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n+27}{3a_n+2}$, $n \geq 1$ și $b_n = \dfrac{a_n-3}{a_n+3}$, $n \geq 1$. Arătați că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică și apoi determinați cele două șiruri.

Argeș

9.O.9. Știind că numărul $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, ..., 2016\}$ este soluție a ecuației:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+...+\frac{1}{x-2015}+\frac{1}{x-2016}=\frac{2017}{x},$$

arătați că:

a) $a \neq \dfrac{2017}{2}$;

b) $\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{2}{a-2}+\dfrac{3}{a-3}+...+\dfrac{2016}{a-2016}=1$.

Adrian Gobej

9.O.10. Se consideră $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $x+\dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că:

a) $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{N}^*$.

b) $x^{2016} + \dfrac{1}{x^{2016}}$ este un număr par.

9.O.11. Se consideră poligonul convex $ABCDE$ și se notează cu M, N, P, Q, R mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, respectiv $[EA]$ și cu A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 mijloacele segmentelor NQ, PR, QM, RN, respectiv MP.

a) Arătați că $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{EE_1}=\vec{0}$.

b) Calculați raportul ariilor poligoanelor $A_1B_1C_1D_1E_1$ și $ABCDE$.

Adrian Gobej

9.O.12. a) Dacă $a, b > 0$, arătați că $\dfrac{2}{a+b} \geq \dfrac{a+b}{a^2+b^2}$.

b) Dacă $x, y, z > 0$ și $xyz = 1$, arătați că $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}+\dfrac{y+z}{y^2+z^2}+\dfrac{z+x}{z^2+x^2} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Bihor

9.O.13. Arătați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $a, n \in \mathbb{N}^*$, au loc inegalitățile:

a) $|x+a|+|x-a^2| \geq a^2+a$;

b) $|x+1|+|x+2|+...+|x+n|+|x-1^2|\ |x-2^2|+...+|x-n^2| \geq \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

9.O.14. Fie $A=\left\{x \in \mathbb{R} \mid [x] \cdot \{x\}=1\right\}$. Demonstrați că:

a) dacă $x \in A$, atunci $x^2=[x]^2+\{x\}^2+2$;

b) dacă $x_1, x_2, ..., x_{2016} \in A$ și $x_1<x_2<...<x_{2016}$, atunci

$$\left\{x_1^2+x_2^2+...+x_{2016}^2\right\}=\{x_1\}^2+\{x_2\}^2+...+\{x_{2016}\}^2.$$

9.O.15. Fie $ABCD$ un patrulater convex de arie 27 m^2 și O intersecția diagonalelor sale. Arătați că centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA sunt vârfurile unui paralelogram. Aflați apoi aria acestui paralelogram.

9.O.16. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ și $(AC) \cap (BD) = \{O\}$. Dacă $M \in (AD)$ și $N \in (BC)$ astfel încât punctele M, O și N să fie coliniare, atunci:

a) exprimați vectorii $\overrightarrow{OM}$ și $\overrightarrow{ON}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{OD}$;

b) demonstrați că $\dfrac{AB}{CD} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{NB}{CN}+\dfrac{MA}{DM}\right)$.

Botoșani

9.O.17. Fie n un număr natural compus și $1=d_1<d_2<...<d_k=n$ divizorii săi naturali, $k \geq 3$. Arătați că $d_1, d_2, ..., d_k$ nu sunt în progresie aritmetică.

9.O.18. a) Determinați $\left[\sqrt{4n^2-2n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că $\left[\dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{4k^2-2k}\right\}}\right]=2, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x).

9.O.19. Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, demonstrați că: $\dfrac{xy}{xy+x+y}+\dfrac{yz}{yz+y+z}+\dfrac{zx}{zx+z+x} \leq \dfrac{6+x^2+y^2+z^2}{9}$.

9.O.20. În triunghiul ABC se consideră M mijlocul lui $[BC]$ și $G \in (AM)$ astfel încât $\dfrac{AG}{AM}=k$. Paralela prin G la BC intersectează AB în D și AC în E. Fie $BG \cap CD = \{Q\}$ și $CG \cap BE = \{P\}$.

a) Arătați că $\dfrac{GQ}{QB}=\dfrac{k}{2}$.

b) Exprimați vectorul $\overrightarrow{GQ}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ și scalarul k.

c) Demonstrați că, dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci $\Delta MPQ \sim \Delta ABC$.

Brașov

9.O.21. Arătați că numărul $a = 2n^2 + \left[\sqrt{4n^2+n}\right] + 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, poate fi scris ca suma a două pătrate perfecte. ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.)

9.O.22. În dreptunghiul $ABCD$, fie $M \in (AB)$ și $N \in (BC)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = 4$ și $\frac{CN}{NB} = 2$. Notăm $\{P\} = DN \cap CM$. Arătați că $17\overrightarrow{AP} = 15\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AD}$.

Ioana Mașca

9.O.23. Fie $(a_n)_{n\geq1}$ o progresie aritmetică cu rația r. Demonstrați că $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{2n}| \geq n|r|$, $\forall\, n \geq 1$. Când are loc egalitatea pentru un număr natural nenul n fixat?

Cătălin Ciupală

9.O.24. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Demonstrați că dacă $ab - 1 = bc = ac + 1 \in \mathbb{N}$, atunci $abc \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Romeo Ilie

Brăila

9.O.25. Arătați că $\left[\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\right] - \left[\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right] = \left[\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}\right] - \left[\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{2}\right]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. S-a notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.

Nicolae Stănică

9.O.26. Determinați formula termenului general al șirului $(a_n)_{n\geq1}$, $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, știind că $a_2 = 3$ și $\left(1 - \frac{2}{a_1^3+1}\right)\left(1 - \frac{2}{a_2^3+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{2}{a_{n-1}^3+1}\right) = \frac{2\left(a_n^2 - n\right)}{3(n+1)a_{n-1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Adela Dimov

9.O.27. Fie triunghiul ABC cu $AB < AC$ și $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB$, iar E, F, P sunt mijloacele segmentelor $[BM]$, $[CN]$ și, respectiv, $[EF]$. Demonstrați că M, P, C sunt coliniare dacă și numai dacă $CN = \sqrt{AC^2 - AB^2}$.

Marius Damian

9.O.28. Determinați valoarea maximă a numărului natural n pentru care $\frac{17^{88}-1}{2^n} \in \mathbb{N}$.

Carmen Botea și Viorel Botea